Proposta de resolução do Exame Nacional de Matemática A – 2017 (1.ª fase)

GRUPO I (Versão 1)

1. Pretende-se determinar quantos números naturais de quatro algarismos, múltiplos de 5, se podem formar com os algarismos de 1 a 9.

Nestas condições, só existe uma possibilidade para o último algarismo: ser igual a 5. E existem nove possibilidades para cada um dos três primeiros algarismos.

__ __ __ $\underline{5}$

$9 \times 9 \times 9 \times 1 = 729$

Logo, existem 729 números nas condições pedidas.

Opção (A)

2. Consideremos os acontecimentos:

V: "ter olhos verdes" M: "ser do sexo masculino"

Sabe-se que:

$P(V \cap M) = \frac{1}{10}$

e $P(V \mid M) = \frac{1}{4}$, isto é, $\frac{P(V \cap M)}{P(M)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{10} = \frac{1}{4} P(M) \Leftrightarrow P(M) = \frac{2}{5}$

Logo, como a turma tem 20 alunos, o número de rapazes da turma é dado por $\frac{2}{5} \times 20 = 8$.

Opção (B)

3. Por observação do gráfico da figura sabemos que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e tem concavidade voltada para cima em $]0, +\infty[$. Então, vem que:

$f''(1) > 0$, $f''(2) > 0$, $f''(-2) < 0$ e $f''(-1) < 0$

Logo, $f''(1) + f''(2) > 0$ por se tratar da soma de dois números reais positivos.

$f''(-2) + f''(-1) < 0$ por se tratar da soma de dois números reais negativos.

$f''(-1) \times f''(-2) > 0$ por se tratar do produto de dois números reais negativos.

$f''(1) \times f''(2) > 0$ por se tratar do produto de dois números reais positivos.

Assim, a única afirmação verdadeira é $f''(1) \times f''(2) > 0$.

Opção (D)

4. Como a reta de equação $y = -x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f e ao gráfico de g quando $x \to +\infty$ (pois $D_f = \mathbb{R}^+$ e $D_g = \mathbb{R}^+$), concluímos que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \text{ e } \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

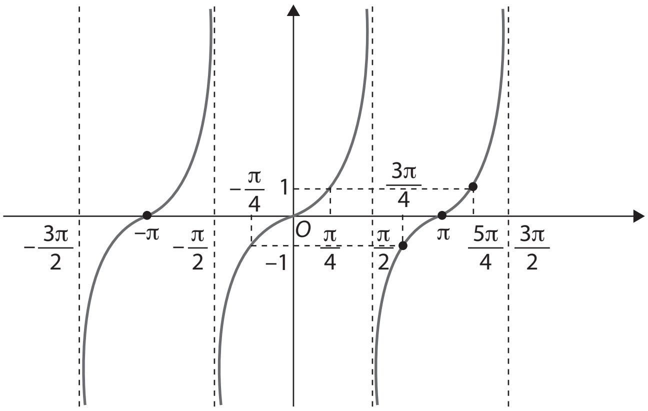
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = -1 \text{ e } \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$$

Então, tem-se que:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) \times g(x)}{x} &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \times g(x)\right) = \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \times \lim_{x \to +\infty} g(x) = \\ &= -1 \times (-\infty) = +\infty\end{aligned}$$

Opção (A)

5. Consideremos a função g definida por $g(x) = \operatorname{tg} x$ de domínio $\mathbb{R} \backslash \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ e a respetiva representação gráfica.



$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$

$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1$

Seja g_1 a restrição de g ao conjunto $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$. Então, o contradomínio de g_1 é igual a $]-1, 1[$.

Seja g_2 a restrição de g ao conjunto $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$. Então, o contradomínio de g_2 é igual a $]-1, +\infty[$.

Seja g_3 a restrição de g ao conjunto $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right[$. Então, o contradomínio de g_3 é igual a $]-\infty, -1[$.

Seja g_4 a restrição de g ao conjunto $\left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$. Então, o contradomínio de g_4 é igual a $]1, +\infty[$.

Logo, dos conjuntos apresentados apenas $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$ pode ser o conjunto A.

Opção (B)

6. Seja *r* uma reta de inclinação α. Então, o seu declive é igual a tg α.

Sabe-se que $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, logo, atendendo a que $1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ vem que $1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}$

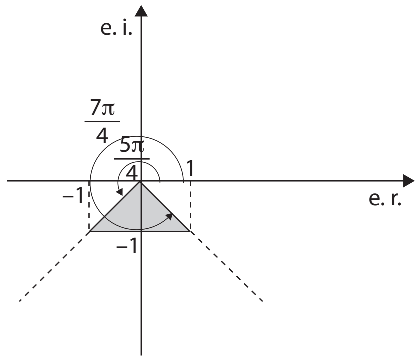
$\Leftrightarrow 1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow 1 + \text{tg}^2\alpha = 5 \Leftrightarrow \text{tg}^2\alpha = 4 \Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha = \pm 2$

Sabe-se, também, que a inclinação de uma reta é um valor entre 0 rad e π rad e, atendendo a que $\cos\alpha < 0$, concluímos que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Logo, $\text{tg}\,\alpha = -2$ pois $\alpha \in 2.^{\text{o}}$ Q.

Assim, a única equação que pode ser equação reduzida da reta *r* é $y = -2x$.

Opção (C)

7. No plano complexo, a condição $\frac{5\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{7\pi}{4} \wedge \text{Im}(z) \geq -1$ define o triângulo representado na figura abaixo.



$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \times h}{2}$$

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

Opção (D)

8. Como $u_{21} = -1$, $u_{22} = 1$ e $u_{23} = -1$, então (u_n) não é monótona.

Averiguemos se (u_n) é limitada:

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet \text{ se } n \leq 20 & 1 \leq u_n \leq 20 \\ \bullet \text{ se } n > 20 & -1 \leq u_n \leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow -1 \leq u_n \leq 20, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Logo, (u_n) é limitada.

Opção (C)

GRUPO II

1. $z_1 = \dfrac{1-3i^{19}}{1+i} = \dfrac{1-3i^3}{1+i} = \dfrac{1-3(-i)}{1+i} = \dfrac{1+3i}{1+i} = \dfrac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1+3i-i-3i^2}{1-i^2} = \dfrac{1+3i-i+3}{2} = \dfrac{4+2i}{2} =$

$= 2+i$

$z_2 = -3k \operatorname{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -3k(-i) = 3ki$

1º Processo

Sejam A e B as imagens geométricas de z_1 e z_2, respetivamente. Assim, $A(2, 1)$ e $B(0, 3k)$.

Então,

$$\begin{aligned}\overline{AB} = \sqrt{5} &\Leftrightarrow \sqrt{(2-0)^2 + (1-3k)^2} = \sqrt{5}\\ &\Leftrightarrow (2-0)^2 + (1-3k)^2 = 5\\ &\Leftrightarrow 4 + (1-3k)^2 = 5\\ &\Leftrightarrow (1-3k)^2 = 1\\ &\Leftrightarrow 1-3k = 1 \ \vee \ 1-3k = -1\\ &\Leftrightarrow k = 0 \ \vee \ k = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Como $k \in \mathbb{R}^+$, então $k = \dfrac{2}{3}$.

2º Processo

A distância entre a imagem geométrica de z_1 e a imagem geométrica de z_2 é igual a $|z_1 - z_2|$. Assim,

$$\begin{aligned}|z_1 - z_2| = \sqrt{5} &\Leftrightarrow |2 + i - 3ki| = \sqrt{5}\\ &\Leftrightarrow |2 + (1-3k)i| = \sqrt{5}\\ &\Leftrightarrow \sqrt{2^2 + (1-3k)^2} = \sqrt{5}\\ &\Leftrightarrow 2^2 + (1-3k)^2 = 5\\ &\Leftrightarrow 4 + (1-3k)^2 = 5\\ &\Leftrightarrow (1-3k)^2 = 1\\ &\Leftrightarrow 1-3k = 1 \ \vee \ 1-3k = -1\\ &\Leftrightarrow k = 0 \ \vee \ k = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Como $k \in \mathbb{R}^+$, então $k = \dfrac{2}{3}$.

2. **2.1.** Verifica-se que $T(0, 0, 3)$ e, como T' é o simétrico de T relativamente à origem do referencial, então $T'(0, 0, -3)$.

Assim, a superfície esférica de diâmetro $[T\,T']$ tem como centro a origem do referencial e raio igual a $\overline{OT} = 3$.

Logo, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ é uma equação da superfície esférica pedida.

2.2. 1º Processo

Sabe-se que os vetores $\overrightarrow{UP}$ e $\overrightarrow{RS}$ têm sentidos opostos. Logo, $\overrightarrow{UP}\hat{\ }\overrightarrow{RS} = 180°$.

$$\overrightarrow{UP} \cdot \overrightarrow{RS} = \|\overrightarrow{UP}\| \times \|\overrightarrow{RS}\| \times \cos(\overrightarrow{UP}\hat{\ }\overrightarrow{RS}) = 3 \times 3 \times \cos(180°) =$$
$$= 3 \times 3 \times (-1) = -9$$

2º Processo

Sabe-se que $\overrightarrow{UP} = \overrightarrow{TO} = (0, 0, -3)$ e $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{OT} = (0, 0, 3)$.

$\overrightarrow{UP} \cdot \overrightarrow{RS} = (0, 0, -3) \cdot (0, 0, 3) = -9$

2.3. Sabe-se que $T(0, 0, 3)$ e, como Q pertence ao eixo Oy, então é do tipo $Q(0, b, 0)$, com $b \in \mathbb{R}$.

Dado que Q pertence ao plano PQV definido por $x + y = 2$, então $0 + b = 2 \Leftrightarrow b = 2$.

Donde se conclui que $Q(0, 2, 0)$.

Tem-se que $\overrightarrow{TQ} = Q - T = (0, 2, 0) - (0, 0, 3) = (0, 2, -3)$.

Logo, $x = 0 \ \wedge\ \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3}$ é uma condição cartesiana que define a reta TQ.

2.4. 1º Processo

O número de casos possíveis é ${}^8C_3$.

O número de casos favoráveis é $6 \times {}^4C_3$, pois existem seis planos perpendiculares a xOy (os quatro planos que contêm as faces laterais do prisma e os planos TVQ e USR) e cada um destes seis planos contém quatro vértices do prisma.

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{6 \times {}^4C_3}{{}^8C_3} = \frac{3}{7}$.

2º Processo

O número de casos possíveis é ${}^8A_3$.

O número de casos favoráveis é $6 \times {}^4A_3$.

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{6 \times {}^4A_3}{{}^8A_3} = \frac{3}{7}$.

3. $P(\overline{A} \cup B)$ representa a probabilidade de, ao retirar uma bola do saco, sair uma bola com um número maior do que seis ou sair uma bola com um número par.

A expressão pedida pode ser obtida pelos seguintes processos.

1º Processo

Tem-se que $P(\overline{A} \cup B) = 1 - P(A \cap \overline{B})$.

$P(A \cap \overline{B})$ representa a probabilidade de, ao retirar uma bola do saco, sair uma bola com um número inferior ou igual a seis e ímpar.

Logo, $P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{3}{n}$.

Donde se conclui que $P(\overline{A} \cup B) = 1 - \dfrac{3}{n} = \dfrac{n-3}{n}$.

2.º Processo

Tem-se que $P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B)$

Como $P(\overline{A}) = \dfrac{n-6}{n}$, $P(B) = \dfrac{1}{2}$ e $P(\overline{A} \cap B) = \dfrac{\frac{n}{2} - 3}{n}$, então $P(\overline{A} \cup B) = \dfrac{n-6}{n} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\frac{n}{2} - 3}{n}$

$$= \frac{n-6}{n} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{3}{n}$$

$$= \frac{n-3}{n}$$

3.º Processo

O número de casos favoráveis ao acontecimento $\overline{A} \cup B$: "o número da bola retirada é superior a 6 ou o número da bola retirada é par" é igual a $n - 3$, pois apenas existem três bolas numeradas com número ímpar inferior ou igual a 6: as bolas numeradas com 1, 3 e 5.

O número de casos possíveis é igual a n.

Logo, $P(\overline{A} \cup B) = \dfrac{n-3}{n}$.

4. 4.1. $\sqrt{(f(0))^2 + x^2} = 2 \Leftrightarrow (f(0))^2 + x^2 = 4$, pois $(f(0))^2 + x^2 > 0, \forall\, x \in [0, 7]$.

$$\Leftrightarrow (9 - 2{,}5\,(e + e^{-1}))^2 + x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \left(9 - 2{,}5\left(e + \frac{1}{e}\right)\right)^2 + x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 - \left(9 - 2{,}5\left(e + \frac{1}{e}\right)\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4 - \left(9 - 2{,}5\left(e + \frac{1}{e}\right)\right)^2}$$

Como $x > 0$, então $x = \sqrt{4 - \left(9 - 2{,}5\left(e + \frac{1}{e}\right)\right)^2}$

Tem-se que $x \approx 1{,}5$

Note-se que $P(0, f(0))$ e $S(x, 0)$. Então, $\sqrt{(f(0))^2 + x^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(f(0)) - 0)^2 + (0 - x)^2} = 2 \Leftrightarrow \overline{PS} = 2$

Logo, na secção representada, 1,5 é a abcissa do ponto da superfície da água do rio que dista dois metros do ponto P.

4.2. Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1º Processo

$f'(x) = (9 - 2{,}5(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}))' =$

$\quad = -2{,}5(-0{,}2e^{1-0{,}2x} + 0{,}2e^{0{,}2x-1}) =$

$\quad = 0{,}5(e^{1-0{,}2x} - e^{0{,}2x-1})$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}5(e^{1-0{,}2x} - e^{0{,}2x-1}) = 0$

$\quad \Leftrightarrow e^{1-0{,}2x} - e^{0{,}2x-1} = 0$

$\quad \Leftrightarrow e^{1-0{,}2x} = e^{0{,}2x-1}$

$\quad \Leftrightarrow 1 - 0{,}2x = 0{,}2x - 1$

$\quad \Leftrightarrow 2 = 0{,}4x$

$\quad \Leftrightarrow x = 5$

x	0		5		7
Sinal de f'	+	+	0	–	–
Variação de f	min.	↗	Máx.	↘	min.

Cálculo auxiliar:

$f'(0) = 0{,}5\left(e - \frac{1}{e}\right) > 0$

$f'(7) = 0{,}5(e^{-0{,}4} - e^{0{,}4}) < 0$

A função f tem um máximo absoluto para $x = 5$:

$f(5) = 9 - 2{,}5(i^0 + i^0) = 9 - 5 = 4$

Como $f(5) < 6$, então o barco não pode passar por baixo da ponte.

2º Processo

$f(x) \geq 6 \Leftrightarrow 9 - 2{,}5(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}) \geq 9$

$\quad \Leftrightarrow -2{,}5(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}) \geq -3$

$\quad \Leftrightarrow e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1} \leq \frac{3}{2{,}5}$

$\quad \Leftrightarrow e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1} - \frac{6}{5} \leq 0$

Consideremos a mudança de variável $e^{1-0{,}2x} = y$:

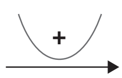
$$\underset{(\times 5y)}{y} + \underset{(\times 5)}{\frac{1}{y}} - \underset{(\times y)}{\frac{6}{5}} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5y^2 + 5 - 6y}{5y} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{5y^2 - 6y + 5 \leq 0}_{\text{condição impossível em } \mathbb{R}\text{, pois o gráfico da função quadrática associada é uma parábola com a concavidade voltada para cima que não interseta } Ox.} \quad , \quad \text{pois } 5y > 0$$

Cálculo auxiliar:

$5y^2 - 6y + 5 = 0$

$\Leftrightarrow y = \underbrace{\frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(5)(5)}}{10}}_{\text{condição impossível em } \mathbb{R}}$



Logo, $f(x) \geq 6$ é uma inequação impossível.

Assim, o barco não pode passar por baixo da ponte.

5. 5.1. g é contínua em $x = 1$ se e só se $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = g(1)$.

- $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1 - x^2}{1 - e^{x-1}} =$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{(1 + x)(1 - x)}{1 - e^{x-1}} =$$

$$= \lim_{x \to 1^-} (1 + x) \times \lim_{x \to 1^-} \frac{1 - x}{1 - e^{x-1}} =$$

$$= 2 \times \lim_{x \to 1^-} \frac{x - 1}{e^{x-1} - 1}$$

Consideremos a mudança de variável $x - 1 = y$. Como $x \to 1^-$, então $y \to 0^-$.

$$= 2 \times \lim_{y \to 0^-} \frac{y}{e^y - 1} = 2 \times \lim_{y \to 0^-} \frac{1}{\frac{e^y - 1}{y}} =$$

$$= 2 \times \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y \to 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{limite notável}}} = 2 \times \frac{1}{1} = 2$$

- $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(3 + \dfrac{\text{sen}(x - 1)}{1 - x}\right) = 3 - \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\text{sen}(x - 1)}{x - 1}$

Consideremos a mudança de variável $x - 1 = y$. Como $x \to 1^+$, então $y \to 0^+$.

$$= 3 - \underbrace{\lim_{y \to 0^+} \frac{\text{sen}\, y}{y}}_{\text{limite notável}} = 3 - 1 = 2$$

- $g(1) = 2$

Logo, g é contínua em $x = 1$.

5.2. Em $]4, 5[$:

$$g(x) = 3 \Leftrightarrow 3 + \frac{\text{sen}(x - 1)}{1 - x} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{sen}(x - 1)}{1 - x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}(x - 1) = 0 \ \wedge \ \underbrace{1 - x \neq 0}_{\text{condição universal em }]4,\, 5[}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$k = 0 \to x = 1$ e $1 \notin]4, 5[$

$k = 1 \to x = 1 + \pi$ e $1 + \pi \in]4, 5[$

$k = 2 \to x = 1 + 2\pi$ e $1 + 2\pi \notin]4, 5[$

Logo, C.S. $= \{1 + \pi\}$

5.3. • Determinar a abcissa do ponto A (com $x < 0$).

Em $x < 0$:

$$\frac{1 - x^2}{1 - e^{x-1}} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \ \wedge \ 1 - e^{x-1} \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \ \wedge \ e^{x-1} \neq 1$$
$$\Leftrightarrow (x = 1 \ \vee \ x = -1) \ \wedge \ x \neq 1$$
$$\Leftrightarrow x = -1$$

Logo, a abcissa do ponto A é igual a -1.

• Equacionar o problema.

Seja x a abcissa do ponto P. Por P ser um ponto de gráfico de f sabemos que as suas coordenadas são do tipo $P(x, f(x))$. Como P tem abcissa e ordenada negativas, então sabemos que $x < -1$ e que $g(x) < 0$.

Pretendemos determinar $x < -1$ tal que:

$$A_{[OAP]} = 5 \Leftrightarrow \frac{\overline{OA} \times |\text{ordenada de } P|}{2} = 5$$
$$\Leftrightarrow \frac{|-1| \times (-g(x))}{2} = 5$$
$$\Leftrightarrow \frac{1 \times \dfrac{x^2 - 1}{1 - e^{x-1}}}{2} = 5$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{2(1 - e^{x-1})} = 5$$

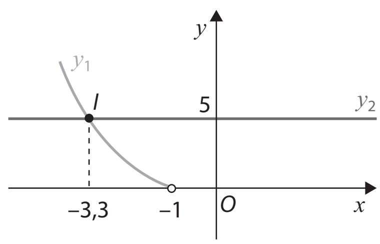
Recorrendo à calculadora gráfica, obtemos:

$y_1 = \dfrac{x^2 - 1}{2(1 - e^{x-1})}$, $x < -1$

$y_2 = 5$

Logo, $I(-3,3; 5)$.

A abcissa do ponto P é aproximadamente $-3,3$.



6. Este item pode ser resolvido por, pelo menos, quatro processos.

1.º Processo

Como o ponto P, de abcissa a, pertence ao gráfico de f, então tem como coordenadas $P(a, f(a))$. Seja r a reta tangente ao gráfico de f em P.

$m_r = f'(a)$ e r é definida por $y = f'(a)x + b$.

Como o ponto $P(a, f(a))$ pertence à reta r, vem que:

$f(a) = f'(a) \times a + b \Leftrightarrow f(a) - f'(a) \times a = b$

Logo, r: $y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$.

Determinemos as coordenadas do ponto Q, ponto de interseção da reta r com o eixo Ox.

$$0 = f'(a)x + f(a) - af'(a) \Leftrightarrow af'(a) - f(a) = f'(a)x$$
$$\Leftrightarrow a - \frac{f(a)}{f'(a)} = x$$

Assim, $Q\left(a - \frac{f(a)}{f'(a)}, 0\right)$.

Tem-se que $\overline{OP} = \sqrt{a^2 + (f(a))^2}$ e $\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^2 + (f(a))^2}$.

E, atendendo a que $\overline{OP} = \overline{PQ}$ vem que:

$$\sqrt{a^2 + (f(a))^2} = \sqrt{\left(\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^2 + (f(a))^2} \Leftrightarrow a^2 + (f(a))^2 = \left(\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^2 + (f(a))^2$$
$$\Leftrightarrow a^2 = \left(\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{f(a)}{f'(a)} \vee a = -\frac{f(a)}{f'(a)}$$

Como $a > 0$, $f(a) > 0$ e $f'(a) < 0$, então $a = -\frac{f(a)}{f'(a)}$, isto é, $f'(a) = -\frac{f(a)}{a} \Leftrightarrow f'(a) + \frac{f(a)}{a} = 0$.

2º Processo

Como o ponto P, de abcissa a, pertence ao gráfico de f, então tem como coordenadas $P(a, f(a))$.

Seja r a reta tangente ao gráfico de f em P.

$m_r = f'(a)$ e r é definida por $y = f'(a)x + b$

Como o ponto $P(a, f(a))$ pertence à reta r, vem que:

$f(a) = f'(a) \times a + b \Leftrightarrow f(a) - f'(a) \times a = b$

Logo, r: $y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$.

Determinemos as coordenadas do ponto Q, ponto de interseção da reta r com o eixo Ox.

$$0 = f'(a)x + f(a) - af'(a) \Leftrightarrow af'(a) - f(a) = f'(a)x$$
$$\Leftrightarrow a - \frac{f(a)}{f'(a)} = x$$

Assim, $Q\left(a - \frac{f(a)}{f'(a)}, 0\right)$.

Por outro lado, como $\overline{OP} = \overline{PQ}$, concluímos que o triângulo $[OPQ]$ é isósceles. Logo, $\overline{OQ} = 2a$.

Logo, $a - \frac{f(a)}{f'(a)} = 2a \Leftrightarrow -\frac{f(a)}{f'(a)} = a$

$$\Leftrightarrow -\frac{f(a)}{a} = f'(a)$$
$$\Leftrightarrow 0 = f'(a) + \frac{f(a)}{a}$$

3.º Processo

Sejam α a amplitude do ângulo *POQ* e β a inclinação da reta *r*, reta tangente ao gráfico de *f* em *a*.

Sabemos que $\text{tg}\,\beta = m_r = f'(a)$ e $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{f(a)}{a}$.

Como $\beta = \pi - \alpha$, então $\text{tg}\,\beta = \text{tg}(\pi - \alpha) = -\,\text{tg}\,\alpha$, ou seja, $f'(a) = -\dfrac{f(a)}{a}$, isto é, $f'(a) + \dfrac{f(a)}{a} = 0$.

4.º Processo

Como o ponto *P*, de abcissa *a*, pertence ao gráfico de *f* então tem como coordenadas $P(a, f(a))$.

Atendendo a que $\overline{OP} = \overline{PQ}$, concluímos que o triângulo [*OPQ*] é isósceles. Logo, $\overline{OQ} = 2a$.

Como *Q* é o ponto de interseção da reta *r* como o eixo Ox, então $Q(2a, 0)$.

O declive da reta *PQ* é igual a $\dfrac{0 - f(a)}{2a - a} = -\dfrac{f(a)}{a}$.

Por outro lado, e atendendo a que *PQ* é a reta tangente ao gráfico de *f* em $x = a$, o seu declive é igual a $f'(a)$.

Donde se conclui que $f'(a) = -\dfrac{f(a)}{a} \Leftrightarrow f'(a) + \dfrac{f(a)}{a} = 0$.